

PRODUITS

REMARQUABLES

Produits remarquables

Compétences à atteindre

- 1) Transformer des expressions littérales, en appliquant les propriétés et en respectant la relation d'égalité dans le but d'obtenir une forme plus simple.
- 2) Maîtriser les règles de calcul relatives aux opérations avec des nombres, aux produits remarquables.
- 3) Calculer la valeur d'une expression numérique en respectant les priorités opératoires et en appliquant les propriétés adéquates.
- 4) Construire des expressions littérales où les lettres ont le statut de variables ou d'inconnues.
- 5) Utiliser les conventions d'écriture mathématique.
- 6) Utiliser l'égalité en terme de résultat et en terme d'équivalence.
- 7) Appliquer un programme de calcul à partir d'une expression algébrique.

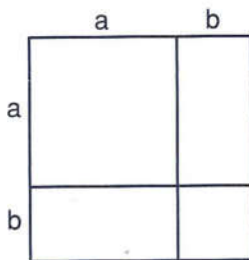
Produits remarquables

1) Activité 1 : Carré d'une somme ou d'une différence

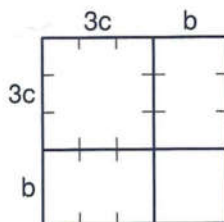
a) Activité de découverte 1 :

~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.

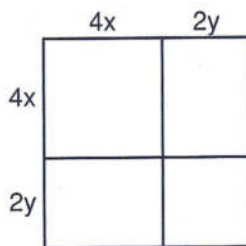
Exprime l'aire des figures ci-dessous de plusieurs manières.



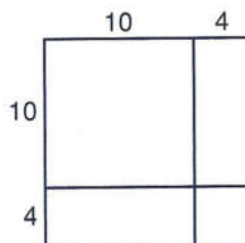
$$\begin{aligned} \text{Aire de la figure} &= (a + b)^2 \\ &= (a + b) \cdot (a + b) \\ &= a \cdot a + a \cdot b + b \cdot a + b \cdot b \\ &= a^2 + 2ab + b^2 \end{aligned}$$



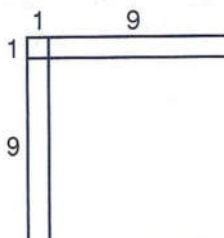
$$\begin{aligned} \text{Aire de la figure} &= (3c + b)^2 \\ &= (3c + b) \cdot (3c + b) \\ &= 3c \cdot 3c + 3c \cdot b + b \cdot 3c + b \cdot b \\ &= 9c^2 + 6bc + b^2 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \text{Aire de la figure} &= (4x + 2y)^2 \\ &= (4x + 2y) \cdot (4x + 2y) \\ &= 4x \cdot 4x + 4x \cdot 2y + 2y \cdot 4x + 2y \cdot 2y \\ &= 16x^2 + 16xy + 4y^2 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \text{Aire de la figure} &= (10 + 4)^2 \\ &= (10 + 4) \cdot (10 + 4) \\ &= 10 \cdot 10 + 10 \cdot 4 + 4 \cdot 10 + 4 \cdot 4 \\ &= 100 + 80 + 16 = 196 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \text{Aire de la figure} &= (1 + 9)^2 \\ &= (1 + 9) \cdot (1 + 9) \\ &= 1 \cdot 1 + 1 \cdot 9 + 9 \cdot 1 + 9 \cdot 9 \\ &= 1 + 18 + 81 = 100 \end{aligned}$$

b) Activité de découverte 2 :



Calcule le carré des nombres suivants en décomposant chaque nombre en une somme de deux termes. Vérifie ton résultat à la calculatrice.

$$103^2 = (100 + 3)^2 = (100 + 3) \cdot (100 + 3) = 10000 + 300 + 300 + 9 = 10609$$

$$61^2 = (60 + 1)^2 = (60 + 1) \cdot (60 + 1) = 3600 + 60 + 60 + 1 = 3721$$

$$32^2 = (30 + 2)^2 = (30 + 2) \cdot (30 + 2) = 900 + 60 + 60 + 4 = 1024$$

$$85^2 = (80 + 5)^2 = (80 + 5) \cdot (80 + 5) = 6400 + 400 + 400 + 25 = 7225$$

$$47^2 = (40 + 7)^2 = (40 + 7) \cdot (40 + 7) = 1600 + 280 + 280 + 49 = 2209$$

$$49^2 = (40 + 9)^2 = (40 + 9) \cdot (40 + 9) = 1600 + 360 + 360 + 81 = 2401$$

c) Activité de découverte 3 :



Démontre l'égalité $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

$$(a + b)^2 = (a + b) \cdot (a + b)$$

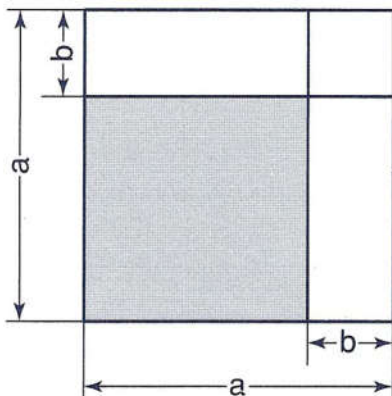
$$= a^2 + ab + ab + b^2$$

$$= a^2 + 2ab + b^2$$

d) Activité de découverte 4 :



Exprime de plusieurs manières l'aire de la figure grisée.



Aire de la figure grisée

$$(a - b)^2 = (a - b) \cdot (a - b)$$

$$= a \cdot a - a \cdot b - b \cdot a + b \cdot b$$

$$= a^2 - ab - ab + b^2$$

$$= a^2 - 2ab + b^2$$

e) Activité de découverte 5 :



Démontre l'égalité $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

$$(a - b)^2 = (a - b) \cdot (a - b)$$

$$= a \cdot a - a \cdot b - b \cdot a + b \cdot b$$

$$= a^2 - 2ab + b^2$$

f) Activité de découverte 6 :



Calcule le carré des nombres proposés en les décomposant en une différence de deux termes et en utilisant la formule démontrée à l'exercice précédent. Vérifie ton résultat à la calculatrice.

$$98^2 = (100 - 2)^2 = (100 - 2) \cdot (100 - 2) = 10000 - 200 - 200 + 4 = 9604$$

$$67^2 = (70 - 3)^2 = (70 - 3) \cdot (70 - 3) = 4900 - 210 - 210 + 9 = 4489$$

$$49^2 = (50 - 1)^2 = (50 - 1) \cdot (50 - 1) = 2500 - 50 - 50 + 1 = 2401$$

g) Activité de découverte 6 :

~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.

Applique la formule du carré d'une somme ou d'une différence.

$$\begin{aligned}(x + y)^2 &= x^2 + 2xy + y^2 \\ (a + 5)^2 &= a^2 + 10a + 25 \\ (3b + 2c)^2 &= 9b^2 + 12bc + 4c^2 \\ (x - 4)^2 &= x^2 - 8x + 16 \\ (5c - 3)^2 &= 25c^2 - 30c + 9 \\ (x + 4y)^2 &= x^2 + 8xy + 16y^2 \\ (x - 9)^2 &= x^2 - 18x + 81 \\ (3 - a)^2 &= 9 - 6a + a^2 \\ (2b + 5a)^2 &= 4b^2 + 20ab + 25a^2 \\ (2x + 5)^2 &= 4x^2 + 20x + 25 \\ (x^3 - 3)^2 &= 3x^6 - 6x^3 + 9 \\ (a^3 + 2b)^2 &= a^6 + 4a^3b + 4b^2 \\ (3a^2 - 5b)^2 &= 9a^4 - 30a^2b + 25b^2 \\ (2ab + 3a^2)^2 &= 4a^2b^2 + 12a^3b + 9a^4 \\ (4a^3 - 3b^2)^2 &= 16a^6 - 24a^3b^2 + 9b^4 \\ (a^2 + 3b^3)^2 &= a^4 + 6a^2b^3 + 9b^6 \\ (5x^3 - 2y^2)^2 &= 25x^6 - 20x^3y^2 + 4y^4 \\ (7a^2 + 5b)^2 &= 49a^4 + 70a^2b + 25b^2 \\ (3a^2b - 2ab^2)^2 &= 9a^4b^2 - 12a^3b^3 + 4a^2b^4 \\ (6a^3c + b^2)^2 &= 36a^6c^2 + 12a^3b^2c + b^4\end{aligned}$$

h) Activité de découverte 7 :

~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.

Complète les égalités suivantes.

$$\begin{aligned}(2a + 3b)^2 &= 4a^2 + 12ab + 9b^2 & 4x^2 - 12xy + 9y^2 &= (2x - 3y)^2 \\ (4a - 1)^2 &= 16a^2 - 8a + 1 & (2b - 3)^2 &= 4b^2 - 12b + 9 \\ 16 + 24a^2 + 9a^4 &= (4 + 3a^2)^2 & 25 - 30a + 9a^2 &= (5 - 3a)^2 \\ (3a - 5)^2 &= 9a^2 - 30a + 25 & (3y + 6)^2 &= 9y^2 + 36y + 36 \\ (y + 4x^2)^2 &= 8x^2y + y^2 + 16x^4 & (5a + 2b)^2 &= 25a^2 + 20ab + 4b^2\end{aligned}$$

Carré d'une somme de deux termes

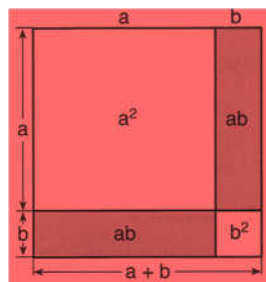
Règle

Le carré d'une somme de deux termes est égal au carré du premier terme, augmenté du double produit des deux termes et augmenté du carré du second terme.

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Exemple : $(5x + 2y)^2 = (5x)^2 + 2 \cdot 5x \cdot 2y + (2y)^2 = 25x^2 + 20xy + 4y^2$

Illustration géométrique



Démonstration algébrique

$$\begin{aligned}(a + b)^2 &= (a + b) \cdot (a + b) \text{ (Définition d'une puissance)} \\ &= a^2 + ab + ab + b^2 \text{ (Double distributivité)} \\ &= a^2 + 2ab + b^2 \text{ (Réduction de termes semblables)}\end{aligned}$$

Carré d'une différence de deux termes

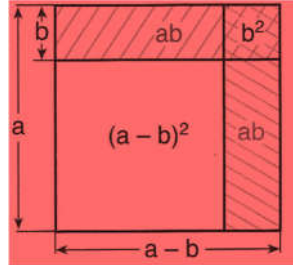
Règle

Le carré d'une différence de deux termes est égal au carré du premier terme, diminué du double produit des deux termes et augmenté du carré du second terme.

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Exemple : $(3x - 4y)^2 = (3x)^2 - 2 \cdot 3x \cdot 4y + (4y)^2 = 9x^2 - 24xy + 16y^2$

Illustration géométrique



Démonstration algébrique

$$(a - b)^2 = (a - b) \cdot (a - b) \text{ (Définition d'une puissance)}$$

$$= a^2 - ab - ab + b^2 \text{ (Double distributivité)}$$

$$= a^2 - 2ab + b^2 \text{ (Réduction de termes semblables)}$$

2) Activité 2 : Produit de deux binômes conjugués

a) Activité de découverte 1 :

~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.

Distribue et réduis les termes semblables.

$$(a - 5) \cdot (a + 5) = a^2 - 25$$

$$(a - 4) \cdot (a + 3) = a^2 - a - 12$$

$$(3a + 2) \cdot (3a - 2) = 9a^2 - 4$$

$$(a^2 - 3) \cdot (a^2 + 3) = a^4 - 9$$

$$(2a + 3) \cdot (2a - 3) = 4a^2 - 9$$

$$(3a - b) \cdot (b + 3a) = 9a^2 - b^2$$

$$(-a - 4) \cdot (-a + 5) = a^2 - a - 20$$

$$(-5a + 2) \cdot (5a + 2) = -25a^2 + 20a + 4$$

$$(a^3 - 1) \cdot (a^3 + 1) = a^6 - 1$$

$$(a + 3) \cdot (a + 3) = a^2 + 6a + 9$$

Certaines réponses ne comportent que deux termes. Pouvait-on le prévoir avant de distribuer ? **Oui lorsque l'on multiplie une somme de deux termes par leur différence.**

b) Activité de découverte 2 :

~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.

Démontre par un développement algébrique que $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - ab + ab - b^2$$

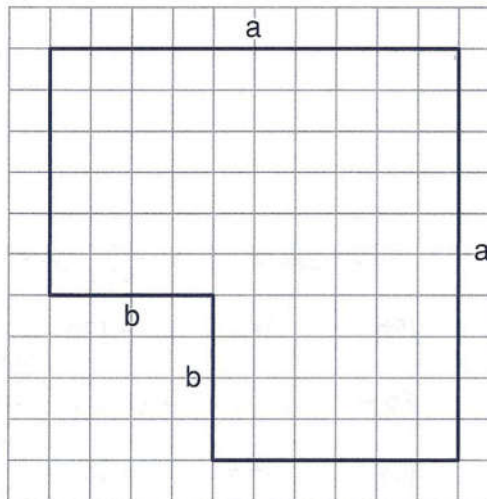
$$= a^2 - b^2$$

c) Activité de découverte 3 :

~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.

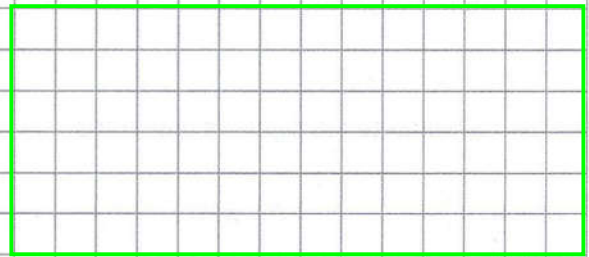
Dessine un rectangle de même aire que la figure ci-dessous. Exprime l'aire des deux figures.

Figure 1



$$\text{Aire} = a^2 - b^2$$

Figure 2



$$\text{Aire} = (a + b) \cdot (a - b)$$

d) Activité de découverte 4 :

~~~~~

Calcule les produits suivants en utilisant, si cela est possible, la formule du produit de deux binômes conjugués.

$$96 \cdot 104 = (100 - 4) \cdot (100 + 4) = 100^2 - 4^2 = 10000 - 16 = 9984$$

$$61 \cdot 59 = (60 + 1) \cdot (60 - 1) = 60^2 - 1^2 = 3600 - 1 = 3599$$

$$13 \cdot 17 = (15 - 2) \cdot (15 + 2) = 15^2 - 2^2 = 225 - 4 = 221$$

$$29 \cdot 21 = (25 + 4) \cdot (25 - 4) = 25^2 - 4^2 = 625 - 16 = 609$$

$$32 \cdot 18 = (25 + 7) \cdot (25 - 7) = 25^2 - 7^2 = 625 - 49 = 576$$

$$22 \cdot 24 = (23 - 1) \cdot (23 + 1) = 23^2 - 1^2 = 529 - 1 = 528$$

$$26 \cdot 29 = 26 \cdot (30 - 1) = 26 \cdot 30 - 1 \cdot 26 = 780 - 26 = 754$$

#### e) Activité de découverte 5 :

~~~~~

Applique la formule du produit de deux binômes conjugués, si cela est possible. Dans le cas contraire, applique la double distributivité.

$$(x - 3) \cdot (x + 3) = x^2 - 9$$

$$(a + 2) \cdot (a - 1) = a^2 + a - 1$$

$$(5x + 1) \cdot (5x - 1) = 25x^2 - 1$$

$$(a^2 - 5) \cdot (a^2 + 5) = a^4 - 25$$

$$(3a + 2) \cdot (3a - 2) = 9a^2 - 4$$

$$(2x - y) \cdot (y + 2x) = 4x^2 - y^2$$

$$(-a - 3) \cdot (-a + 2) = a^2 + a - 6$$

$$(-5x + 1) \cdot (5x + 1) = -25x^2 + 1$$

$$(a^3 + 2) \cdot (a^3 - 2) = a^6 - 4$$

$$(x + 7) \cdot (7 + x) = x^2 + 14x + 49$$

$$(a^2 + 3) \cdot (-a^2 - 3) = -a^4 - 9$$

$$(ab + 5) \cdot (5 + ab) = a^2b^2 + 10ab + 25$$

f) Activité de découverte 5 :

~~~~~

Complète les égalités suivantes.

$$(5x - 3) \cdot (5x + 3) = 25x^2 - 9$$

$$(4x - 5y) \cdot (4x + 5y) = 16x^2 - 25y^2$$

$$(a + 7) \cdot (a - 7) = a^2 - 49$$

$$(x + 1) \cdot (x - 1) = x^2 - 1$$

$$(3a + 2b) \cdot (3a - 2b) = 9a^2 - 4b^2$$

$$(4 - 5a) \cdot (4 + 5a) = 16 - 25a^2$$

$$(1 + xy) \cdot (1 - xy) = 1 - x^2y^2$$

$$(5 + a) \cdot (5 - a) = 25 - a^2$$

$$(a - 7b) \cdot (a + 7b) = a^2 - 49b^2$$

$$(x + 1) \cdot (1 - x) = 1^2 - x^2$$

### Produit de deux binômes conjugués

#### Définition

Un binôme est une somme de deux termes.

Deux binômes conjugués sont deux binômes qui ne diffèrent que par un signe d'un des termes.

#### Conséquence

Le produit de deux binômes conjugués est donc le produit de la somme de deux termes par leur différence.

Exemples :  $(a + b) \cdot (a - b)$

$$(2x - 5) \cdot (5 + 2x) = (2x - 5) \cdot (2x + 5)$$

$$(-2 + b) \cdot (2 + b) = (b - 2) \cdot (b + 2)$$

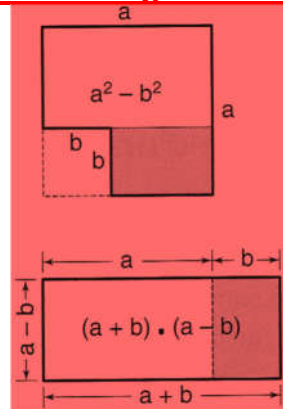
#### Règle

Le produit de deux binômes conjugués est égal au carré du terme qui ne change pas de signe diminué du carré du terme qui change de signe.

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$$

Exemple :  $(5x + 2y) \cdot (5x - 2y) = (5x)^2 - (2y)^2 = 25x^2 - 4y^2$

#### Illustration géométrique



#### Démonstration algébrique

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - ab + ab - b^2 \text{ (Double distributivité)}$$

$$= a^2 - b^2 \text{ (Réduction des termes semblables)}$$

## 3) Activité 3 : Produits remarquables : exercices de synthèse

\*\*\*\*\*

### a) Activité de découverte 1 :

~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.~.

Applique la bonne formule.

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(3 - a^2)^2 = 9 - 6a^2 + a^4$$

$$(a - b) \cdot (a + b) = a^2 - b^2$$

$$(2a + 3) \cdot (3 - 2a) = 9 - 4a^2$$

$$(5 - b)^2 = 25 - 10b + b^2$$

$$(5x + 2y)^2 = 25x^2 + 20xy + 4y^2$$

$$(2x + 3y^2) \cdot (3y^2 - 2x) = 9y^4 - 4x^2$$

$$(4a - 2b)^2 = 16a^2 - 16ab + 4b^2$$

$$(x - 5) \cdot (5 + x) = x^2 - 25$$

$$(x^3 + 1) \cdot (x^3 - 1) = x^6 - 1$$

$$(3x - 2y)^2 = 9x^2 - 12xy + 4y^2$$

$$(a + 4)^2 = a^2 + 8a + 16$$

$$(2 - x^2) \cdot (x^2 + 2) = 4 - x^4$$

$$(3a^3 - 2b^2)^2 = 9a^6 - 12a^3b^2 + 4b^4$$



## b) Activité de découverte 2 :



Identifie l'exercice en précisant s'il s'agit d'une double distributivité ( DD ), d'une somme au carré ( SC ), d'une différence au carré ( DC ) ou d'un produit de deux binômes conjugués ( BC ), puis effectue.

|    |                                     |                          |
|----|-------------------------------------|--------------------------|
| DC | $(3a - b)^2 =$                      | $9a^2 - 6ab + b^2$       |
| DD | $(x - 3y) \cdot (x + y) =$          | $x^2 - 2xy - 3y^2$       |
| BC | $(3a - 5) \cdot (5 + 3a) =$         | $9a^2 - 25$              |
| DD | $(-c - d) \cdot (c + d) =$          | $-c^2 - 2cd - d^2$       |
| SC | $(a + 2) \cdot (a + 2) =$           | $a^2 + 4a + 4$           |
| BC | $(3b + 1) \cdot (-1 + 3b) =$        | $9b^2 - 1$               |
| DD | $(-3b - 1) \cdot (3b + 1) =$        | $-9b^2 - 6b - 1$         |
| BC | $(a - 5) \cdot (-a - 5) =$          | $-a^2 + 25$              |
| DC | $(a^2 - 3b^3)^2 =$                  | $a^4 - 6a^2b^3 + 9b^6$   |
| BC | $(5x + 4y) \cdot (5x - 4y) =$       | $25x^2 - 16y^2$          |
| SC | $(3a^2 + 2b^3)^2 =$                 | $9a^4 + 12a^2b^3 + 4b^6$ |
| BC | $(x^2 + 4y^3) \cdot (4y^3 - x^2) =$ | $x^4 - 16y^6$            |

## c) Activité de découverte 3 :



Applique les produits remarquables.

$$105^2 = (100 + 5)^2 = 10000 + 1000 + 25 = 11025$$

$$69^2 = (60 + 9)^2 = 3600 + 1080 + 81 = 4761$$

$$98 \cdot 102 = (100 - 2) \cdot (100 + 2) = 10000 - 4 = 9996$$

$$57 \cdot 63 = (60 - 3) \cdot (60 + 3) = 3600 - 9 = 3591$$

$$12 \cdot 18 = (15 - 3) \cdot (15 + 3) = 225 - 9 = 216$$

$$75^2 = (70 + 5)^2 = 4900 + 700 + 25 = 5625$$

## d) Activité de découverte 4 :



Complète par = ou  $\neq$  en calculant séparément chaque expression.

|                         |        |               |                         |        |                 |                         |        |               |
|-------------------------|--------|---------------|-------------------------|--------|-----------------|-------------------------|--------|---------------|
| $(7 \cdot 8)^2$         | $\neq$ | $7 \cdot 8^2$ | $(7 \cdot 8)^2$         | $=$    | $7^2 \cdot 8^2$ | $(7 + 8)^2$             | $\neq$ | $7^2 + 8^2$   |
| $7^2 \cdot 8^2$         |        | $7 \cdot 64$  | $7^2 \cdot 8^2$         |        | $49 \cdot 64$   | $15^2$                  |        | $49 + 64$     |
| <b>3136</b>             |        | <b>448</b>    | <b>448</b>              |        | <b>448</b>      | <b>225</b>              |        | <b>113</b>    |
| $(2 + 3)^3$             | $\neq$ | $2^3 + 3^3$   | $(2 \cdot 3)^3$         | $=$    | $2^3 \cdot 3^3$ | $(2 \cdot 3)^3$         | $\neq$ | $2 \cdot 3^3$ |
| $5^3$                   |        | $8 + 9$       | $2^3 \cdot 3^3$         |        | $8 \cdot 27$    | $6^3$                   |        | $2 \cdot 27$  |
| <b>125</b>              |        | <b>17</b>     | <b>216</b>              |        | <b>216</b>      | <b>216</b>              |        | <b>54</b>     |
| $(7 + 3) \cdot (7 - 3)$ | $=$    | $7^2 - 3^2$   | $(3 - 7) \cdot (7 - 3)$ | $\neq$ | $(7 - 3)^2$     | $(7 + 3) \cdot (7 + 3)$ | $\neq$ | $7^2 + 3^2$   |
| $7^2 - 3^2$             |        | $49 - 9$      | $-4 \cdot 4$            |        | $4^2$           | $10 \cdot 10$           |        | $49 + 9$      |
| <b>40</b>               |        | <b>40</b>     | <b>-16</b>              |        | <b>16</b>       | <b>100</b>              |        | <b>58</b>     |

En t'inspirant des exercices ci-dessus, complète par = ou  $\neq$ .

|                 |        |                 |                         |        |             |                 |        |                 |
|-----------------|--------|-----------------|-------------------------|--------|-------------|-----------------|--------|-----------------|
| $(a + b)^2$     | $\neq$ | $a^2 + b^2$     | $(a + b) \cdot (a - b)$ | $=$    | $a^2 - b^2$ | $(a + b)^3$     | $\neq$ | $a^3 + b^3$     |
| $(a \cdot b)^2$ | $=$    | $a^2 \cdot b^2$ | $(a + b) \cdot (a + b)$ | $\neq$ | $a^2 + b^2$ | $(a \cdot b)^3$ | $=$    | $a^3 \cdot b^3$ |
| $(a \cdot b)^2$ | $\neq$ | $a \cdot b^2$   | $(a - b) \cdot (b - a)$ | $\neq$ | $(a - b)^2$ | $(a \cdot b)^3$ | $\neq$ | $a \cdot b^3$   |

### e) Activité de découverte 5 :



Complète par = ou  $\neq$ .

|                         |        |             |                         |        |              |
|-------------------------|--------|-------------|-------------------------|--------|--------------|
| $x^2 - y^2$             | $\neq$ | $y^2 - x^2$ | $(x - y) \cdot (x - y)$ | $\neq$ | $x^2 + y^2$  |
| $(x + 5) \cdot (x - 5)$ | $\neq$ | $x^2 - 10$  | $(2x - y)^2$            | $\neq$ | $(x - 2y)^2$ |
| $(x - y)^2$             | $\neq$ | $(y - x)^2$ | $(x + y)^2$             | $=$    | $(-x - y)^2$ |
| $xy^2$                  | $\neq$ | $x^2y$      | $(x - y)^2$             | $\neq$ | $x^2 - y^2$  |
| $x^2 + y^2$             | $\neq$ | $(x + y)^2$ | $x^2y^2$                | $=$    | $(xy)^2$     |

### f) Activité de découverte 5 :



Complète les égalités par des expressions ne contenant plus de parenthèses.

|                              |                                         |
|------------------------------|-----------------------------------------|
| $(5x)^2 = 25x^2$             | $(x + 2) \cdot (x - 2) = x^2 - 4$       |
| $5 \cdot (x + 2) = 5x + 10$  | $(x + 3) \cdot (x - 2) = x^2 + x - 6$   |
| $(5 + x)^2 = 25 + 10x + x^2$ | $(x + 3) \cdot (x + 3) = x^2 + 6x + 9$  |
| $5 - (x - 2) = 7 - x$        | $(x + 3) - (x - 3) = 6$                 |
| $(5 - x) \cdot 2 = 10 - 2x$  | $(x - 3) \cdot (3 - x) = -x^2 - 9 + 6x$ |
| $(5 - x)^2 = 25 - 10x + x^2$ | $(x - 3) + (x + 3) = 2x$                |
| $(-5x^3)^2 = 25x^6$          | $-3x \cdot (x + 3) = -3x^2 - 9x$        |

## 4) Activité 4 : Produits remarquables (dépassement)



### a) Activité de découverte 1 :



Au cours de l'activité 1, tu as découvert deux formules :

le carré d'une somme  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

le carré d'une différence  $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

En réalité, le carré d'une différence n'est qu'un cas particulier du carré d'une somme.

$$(a - b)^2 = [a + (-b)]^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot (-b) + (-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Fais de même avec les expressions suivantes.

$$(-a + b)^2 = (-a)^2 + 2 \cdot (-a) \cdot b + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(-a - b)^2 = (-a)^2 - 2 \cdot (-a) \cdot b + (-b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

### b) Activité de découverte 2 :



Calcule en utilisant les produits remarquables.

|                                          |
|------------------------------------------|
| $(-x + 3)^2 = x^2 - 6x + 9$              |
| $(-x - 2)^2 = x^2 + 4x + 4$              |
| $(-8 + x)^2 = 64 - 16x + x^2$            |
| $(-2 + 4x)^2 = 4 - 16x + 16x^2$          |
| $(-1 - 3a)^2 = 1 + 6a + 9a^2$            |
| $(5x - 2y)^2 = 25x^2 - 20xy + 4y^2$      |
| $(-2a^2 + b^3)^2 = 4a^4 - 4a^2b^3 + b^6$ |
| $(-x^2 - 3y^2)^2 = x^4 + 6x^2y^2 + 9y^4$ |

### c) Activité de découverte 3 :



Calcule en utilisant obligatoirement les produits remarquables si cela est possible.

$$\begin{aligned}
 (6x + 1) \cdot (1 - 6x) &= 1 - 36x^2 \\
 (-7x + 3)^2 &= 49x^2 - 42x + 9 \\
 (2a - 3b) \cdot (3a - 2b) &= 6a^2 - 13ab + 6b^2 \\
 (-3 - a)^2 &= 9 + 6a + a^2 \\
 (2 - y)^2 &= 4 - 4y + y^2 \\
 (4x + 5y^2)^2 &= 16x^2 + 40xy^2 + 25y^4 \\
 (-x^2 - y^3) \cdot (x^2 + y^3) &= -x^4 - 2x^2y^3 - y^6 \\
 (-2b - 4a)^2 &= 4b^2 + 16ab + 16a^2 \\
 (a + 1) \cdot (a - 2) &= a^2 - a - 2 \\
 (-2x - 3)^2 &= 4x^2 + 12x + 9 \\
 (-5a - 2b) \cdot (2b - 5a) &= 25a^2 - 4b^2 \\
 (-7a^2 - 2b) \cdot (2b - 7a^2) &= 49a^4 - 4b^2 \\
 (-x^3 - y^2) \cdot (-x^3 + y^2) &= x^6 - y^4
 \end{aligned}$$

## 5) Exercices complémentaires

\*\*\*\*\*

### Série A :

~.~.~.~.~.

1) Applique les produits remarquables.

|    |                                        |    |                                            |    |                                       |
|----|----------------------------------------|----|--------------------------------------------|----|---------------------------------------|
| a) | $(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$             | b) | $(2a - 5)^2 = 4a^2 - 20a + 25$             | c) | $(a + 3b)^2 = a^2 + 6ab + 9b^2$       |
|    | $(x - 5)^2 = x^2 - 10x + 25$           |    | $(3 - 4x)^2 = 9 - 24x + 16x^2$             |    | $(4 - 3a)^2 = 16 - 24a + 9a^2$        |
|    | $(3a + 2)^2 = 9a^2 + 12a + 4$          |    | $(3ab + b)^2 = 9a^2b^2 + 6ab^2 + b^2$      |    | $(2x - x^2)^2 = 4x^2 - 4x^3 + x^4$    |
|    | $(4b - 1)^2 = 16b^2 - 8b + 1$          |    | $(5a^2 - 3)^2 = 25a^4 - 30a^2 + 9$         |    | $(3 - x^3)^2 = 9 - 6x^3 + x^6$        |
|    | $(5a - 3)^2 = 25a^2 - 30a + 9$         |    | $(3a - 4b)^2 = 9a^2 - 24ab + 16b^2$        |    | $(1 + x)^2 = 1 + 2x + x^2$            |
| d) | $(x - 5) \cdot (x + 5) = x^2 - 25$     | e) | $(x - 2) \cdot (2 + x) = x^2 - 4$          | f) | $(2x - 3)^2 = 4x^2 - 12x + 9$         |
|    | $(4x + 1) \cdot (4x - 1) = 16x^2 - 1$  |    | $(3x + 1) \cdot (1 - 3x) = 1 - 9x^2$       |    | $(2x - 3) \cdot (2x + 3) = 4x^2 - 9$  |
|    | $(1 - x) \cdot (1 + x) = 1 - x^2$      |    | $(-5x + 4) \cdot (4 + 5x) = 16 - 25x^2$    |    | $(3 + 2x)^2 = 9 + 12x + 4x^2$         |
|    | $(x^3 - 4) \cdot (x^3 + 4) = x^6 - 16$ |    | $(x^3 + 5) \cdot (5 - x^3) = 25 - x^6$     |    | $(-2x + 3) \cdot (2x + 3) = 9 - 4x^2$ |
|    | $(5 + x^4) \cdot (5 - x^4) = 25 - x^8$ |    | $(6 - 3ab) \cdot (6 + 3ab) = 36 - 9a^2b^2$ |    | $(3 - 2x)^2 = 9 - 12x + 4x^2$         |

2) Applique les produits remarquables.

|    |                                            |    |                                       |
|----|--------------------------------------------|----|---------------------------------------|
| a) | $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$              | b) | $(3b - 5)^2 = 9b^2 - 30b + 25$        |
|    | $(5 - a^2)^2 = 25 - 10a^2 + a^4$           |    | $(a + 3) \cdot (3 - a) = 9 - a^2$     |
|    | $(2a - 5b) \cdot (5b + 2a) = 4a^2 - 25b^2$ |    | $(a - 3)^2 = a^2 - 6a + 9$            |
|    | $(4 - 3b)^2 = 16 - 24b + 9b^2$             |    | $(2a + a^2)^2 = 4a^2 + 4a^3 + a^4$    |
|    | $(4 + 5b) \cdot (-4 + 5b) = 25b^2 - 16$    |    | $(a^3 - 3) \cdot (a^3 + 3) = a^6 - 9$ |
|    | c)                                         |    |                                       |
|    | $(3 - 2a) \cdot (2a + 3) = 9 - 4a^2$       |    |                                       |
|    | $(3 - 2a)^2 = 9 - 12a + 4a^2$              |    |                                       |
|    | $(2a + 3)^2 = 4a^2 + 12a + 9$              |    |                                       |
|    | $(2a + 3) \cdot (2a + 3) = 4a^2 + 12a + 9$ |    |                                       |
|    | $(a^3 + a^2)^2 = a^6 + 2a^5 + a^4$         |    |                                       |

3) Applique les produits remarquables ou distribue.

|    |                                        |    |                                            |
|----|----------------------------------------|----|--------------------------------------------|
| a) | $(a + 2) \cdot (a - 3) = a^2 - a - 6$  | b) | $(2x - 1) \cdot (1 - 2x) = 4x - 4x^2 - 1$  |
|    | $(a - 3)^2 = a^2 - 6a + 9$             |    | $(3x + 4) \cdot (4 - 3x) = -9x^2 + 16$     |
|    | $(a + 2) \cdot (2 - a) = 4 - a^2$      |    | $(3x - 4)^2 = 9x^2 - 24x + 16$             |
|    | $(2 - a) \cdot (2 - a) = 4 - 4a + a^2$ |    | $(3x + 4) \cdot (1 - 2x) = -6x^2 + 4 - 5x$ |
|    | $(2 + a) \cdot (2 + a) = 4 + 4a + a^2$ |    | $(2x + 1)^2 = 4x^2 + 4x + 1$               |

c)

$$\begin{aligned}(a + 4) \cdot (-a - 4) &= -a^2 - 8a - 16 \\ (4 - a)^2 &= 16 - 8a + a^2 \\ (-4 + a) \cdot (a - 4) &= -8a + 16 + a^2 \\ (-3 + a) \cdot (a + 4) &= -12 + a^2 + a \\ (a^2 - 2b)^2 &= a^4 - 4a^2b + 4b^2\end{aligned}$$

4) Ecris sans parenthèses.

a)

$$\begin{aligned}(4a)^2 &= 16a^2 \\ (4 + a)^2 &= 16 + 8a + a^2 \\ (4 + a) \cdot 2 &= 8 + 2a \\ 4 \cdot (a + 2) &= 4a + 8 \\ 4 - (a + 2) &= 2 - a\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}(-3x)^2 &= 9x^2 \\ (x - 3)^2 &= x^2 - 6x + 9 \\ -3 \cdot (x - 2) &= -3x + 6 \\ -(3 \cdot x)^2 &= -9x^2 \\ 3 - (x - 2) &= 5 - x\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}(x^2 + 4) \cdot (x^2 - 4) &= x^4 - 16 \\ (x^2 - 4)^2 &= x^4 - 8x^2 + 16 \\ (-4x)^2 &= 16x^2 \\ x^2 \cdot (x^2 - 4) &= x^4 - 4x^2 \\ (x^2 - 4) - (x^2 + 4) &= -8\end{aligned}$$

5) Applique les produits remarquables pour calculer.

a)

$$\begin{aligned}103^2 &= (100 + 3)^2 = 10000 + 600 + 9 = 10609 \\ 98^2 &= (100 - 2)^2 = 10000 - 800 + 4 = 9204 \\ 73 \cdot 67 &= (70 + 3) \cdot (70 - 3) = 4900 - 9 = 4891 \\ 16 \cdot 14 &= (15 + 1) \cdot (15 - 1) = 225 - 1 = 224 \\ 69^2 &= (70 - 1)^2 = 4900 - 140 + 1 = 4761\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}81 \cdot 79 &= (80 + 1) \cdot (80 - 1) = 6400 - 1 = 6399 \\ 115 \cdot 85 &= (100 + 15) \cdot (100 - 15) = 10000 - 225 = 9775 \\ 75^2 &= (70 + 5)^2 = 4900 + 700 + 25 = 5625 \\ 81^2 &= (80 + 1)^2 = 6400 + 160 + 1 = 6561 \\ 46^2 &= (50 - 4)^2 = 2500 - 400 + 16 = 2116\end{aligned}$$

6) Vrai ou faux ?

a)

$$\begin{aligned}(a + b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 && \text{Vrai} \\ (a - b)^2 &= a^2 - b^2 && \text{Faux} \\ (a - b) \cdot (a - b) &= a^2 + b^2 && \text{Faux} \\ (a + b)^2 &= (-a - b)^2 && \text{Vrai} \\ (a - b)^2 &= (b - a)^2 && \text{Vrai}\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}(a \cdot b)^2 &= a^2 \cdot b^2 && \text{Vrai} \\ (a \cdot b)^2 &= 2 \cdot a \cdot b && \text{Faux} \\ (a \cdot b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 && \text{Faux} \\ (a - b)^2 &= a^2 + b^2 && \text{Faux} \\ (-b - a)^2 &= b^2 + 2ab + a^2 && \text{Vrai}\end{aligned}$$

7) Pour chaque calcul, entoure le bon développement.

| Calcul                     | Réponses              |                      |                       |
|----------------------------|-----------------------|----------------------|-----------------------|
| $(a + 4)^2$                | $a^2 + 16$            | $a^2 + 4a + 16$      | $a^2 + 8a + 16$       |
| $(b - 5)^2$                | $b^2 - 10b + 5$       | $b^2 + 25 - 10b$     | $b^2 + 10b + 25$      |
| $(3x + 2) \cdot (3x - 2)$  | $9x^2 - 4$            | $3x^2 - 4$           | $9x^2 + 4$            |
| $(5a + 2)^2$               | $25a^2 + 10a + 4$     | $25a^2 + 20a + 4$    | $5a^2 + 20a + 4$      |
| $(4a - 3b)^2$              | $16a^2 - 24ab + 9b^2$ | $4a^2 - 24ab + 3b^2$ | $9b^2 - 12ab + 16a^2$ |
| $(-1 + 2b) \cdot (2b + 1)$ | $2b^2 - 1$            | $4b^2 - 1$           | $4b^2 - 2$            |

## Série B :

~.~.~.~.~.

1) Applique les produits remarquables ou distribue.

a)

$$\begin{aligned}(-3a + 5)^2 &= 9a^2 - 30a + 25 \\ (-2x + 3) \cdot (-2x - 3) &= 4x^2 - 9 \\ (-x - 4)^2 &= x^2 + 8x + 16 \\ (4x - 2) \cdot (2 - 4x) &= 16x - 16x^2 - 4 \\ (x - 3x^2)^2 &= x^2 - 6x^3 + 9x^4\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}(-5x + 1) \cdot (1 + 5x) &= 1 - 25x^2 \\ (2a - 1) \cdot (1 + 2a) &= 4a^2 - 1 \\ (-4b - 1) \cdot (-4b - 1) &= 16b^2 + 8b + 1 \\ (-4a - 3b)^2 &= 16a^2 + 24ab + 9b^2 \\ (-b + 5a) \cdot (-b + 5a) &= b^2 - 10ab + 25a^2\end{aligned}$$

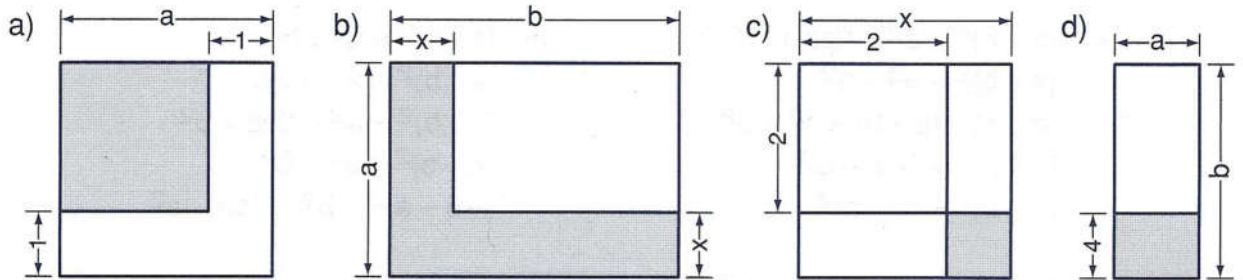
c)

$$\begin{aligned} (-3a + 2b)^2 &= 9a^2 - 12ab + 4b^2 \\ (-4a + b) \cdot (-4a - b) &= 16a^2 - b^2 \\ (-5a - 2b) \cdot (5a + 2b) &= -25a^2 - 20ab - 4b^2 \\ (-4a - 3b)^2 &= 16a^2 + 24ab + 9b^2 \\ (-b + 5a) \cdot (-b + 5a) &= b^2 - 10ab + 25a^2 \end{aligned}$$

2) Si tu sais que  $85^2 = 7225$ , détermine rapidement et sans calculatrice  $86^2$ . Connaissant le carré d'un nombre  $n$ , comment connaître la carré du nombre suivant ?

$$\begin{aligned} 86^2 &= (85 + 1)^2 = 85^2 + 2 \cdot 85 \cdot 1 + 1 = 7225 + 170 + 1 = 7396 \\ (n + 1)^2 &= n^2 + 2n + 1 \end{aligned}$$

3) Exprime de plusieurs manières différentes, l'aire de la partie grisée.



$$\begin{aligned} \text{a) } & (a - 1)^2 \text{ ou } a^2 - a - a + 1 \text{ ou } a^2 - 2a + 1 \text{ ou } a^2 - (a - 1) - (a - 1) - 1 \\ \text{b) } & ab - (b - x) \cdot (a - x) \text{ ou } ax + x \cdot (b - x) \text{ ou } bx + x \cdot (a - x) \\ & \text{ou } x^2 + x \cdot (a - x) + x \cdot (b - x) \text{ ou } ax + bx - x^2 \\ \text{c) } & (x - 2)^2 \text{ ou } x^2 - 4x + 4 \text{ ou } x^2 - 2x - 2x + 4 \text{ ou } x^2 - 4 - 2 \cdot (x - 2) - 2 \cdot (x - 2) \\ \text{d) } & 4a \text{ ou } ab - a \cdot (b - 4) \end{aligned}$$

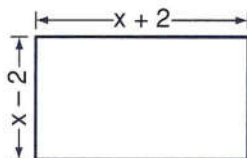
4) a) Calcule la valeur numérique des expressions ci-dessous si tu sais que  $ab = -8$  et  $a + b = 2$ .

$$\begin{aligned} (a + 1) \cdot (b + 1) &= -5 \\ (a - 1) \cdot (b - 1) &= -9 \\ (a + 3) \cdot (b + 3) &= 7 \\ (a - 6) \cdot (b - 6) &= 16 \end{aligned}$$

b) Calcule la valeur numérique des expressions ci-dessous si tu sais que  $a^2 = 25$  et  $b^2 = 9$ .

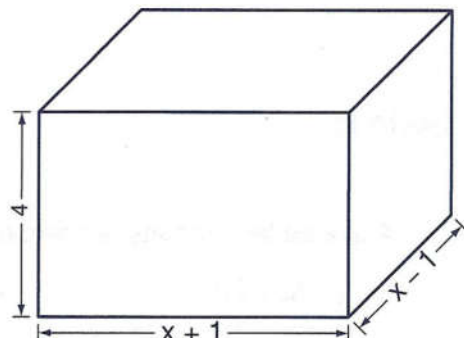
$$\begin{aligned} (a - 1) \cdot (a + 1) &= 24 \\ (5 - b) \cdot (5 + b) &= 16 \\ (-4 + a) \cdot (a + 4) &= 9 \\ (7 - b) \cdot (-7 - b) &= -40 \end{aligned}$$

5) a) Calcule la valeur de  $x$  pour que l'aire du rectangle soit  $45 \text{ cm}^2$ .



$$\begin{aligned} (x - 2) \cdot (x + 2) &= 45 \\ x &= 7 \end{aligned}$$

b) Calcule la valeur de  $x$  pour que le volume du parallélépipède rectangle soit  $96 \text{ cm}^3$ .



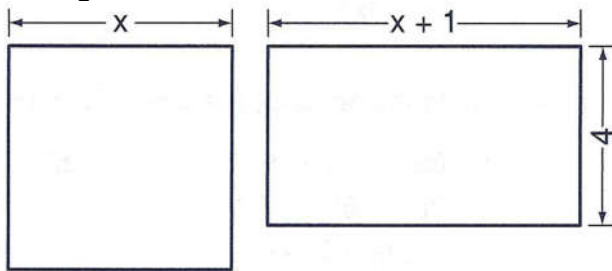
$$\begin{aligned} (x + 1) \cdot (x - 1) \cdot 4 &= 96 \\ x &= 5 \end{aligned}$$

( Les solutions négatives n'ont pas de sens dans un problème de longueurs )

## Série C :

~.~.~.~.~.

- 1) Détermine la longueur du côté d'un carré dont l'aire est égale à la somme des aires des deux figures.



L'aire totale des deux figures :

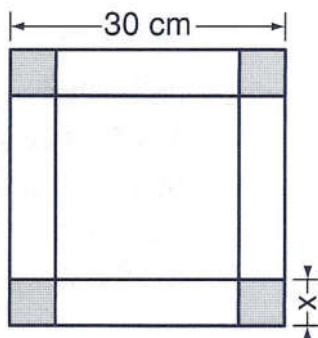
$$x^2 + (x + 1) \cdot 4 = x^2 + 4x + 4$$

L'aire du nouveau carré :

$$x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$$

Mesure de son côté :  $x + 2$

- 2) En utilisant un carré de 30 cm de côté, on veut fabriquer une boîte parallélépipédique de base carrée, sans couvercle, après avoir découpé les petits carrés comme le montre le dessin ci-dessous et relevé les quatre rectangles. Exprime le volume de la boîte en fonction de la dimension des petits carrés enlevés ( $x$ ).



Aire de la base de la boîte :

$$(30 - 2x)^2 = 900 - 120x + 4x^2$$

Volume de la boîte :

$$x \cdot (30 - 2x)^2 = x \cdot (900 - 120x + 4x^2) = 900x - 120x^2 + 4x^3$$

## 6) Activité 5 : Factorisation

\*\*\*\*\*

### a) Activité de découverte 1 :

~.~.~.~.~.

Factorise les expressions suivantes par la mise en évidence de facteurs communs.

$$5a + 5b = 5 \cdot (a + b)$$

$$4a - 8 = 4 \cdot (a - 2)$$

$$12a - 18b = 6 \cdot (2a - 3b)$$

$$6a + 3 = 3 \cdot (2a + 1)$$

$$8ab + 4ac = 4a \cdot (2b + c)$$

$$24xy - 36xz = 12x \cdot (2y - 3z)$$

$$60a + 15ab = 15a \cdot (4 + b)$$

$$-21a - 28 = -7 \cdot (3a + 4)$$

$$8a^3 + 6a = 2a \cdot (4a^2 + 3)$$

$$10a^2 - 15a^3 = 5a^2 \cdot (2 - 3a)$$

$$18a^5 + 2a^3 = 2a^3 \cdot (9a^2 + 1)$$

$$-14a^6 - 21a^3 = -7a^3 \cdot (2a^3 + 3)$$

$$3b^2 - 6b + 9b^3 = 3b \cdot (b - 2 + 3b^2)$$

$$2a^2x - 4ax = 2ax \cdot (a - 2)$$

$$36a^2 + 1 + 12a = (6a + 1)^2$$

$$-6ab + a^2 + 9b^2 = (3b - a)^2$$

### b) Activité de découverte 2 :

~.~.~.~.~.

Factorise les expressions suivantes en un carré d'une somme ou d'une différence.

$$a^2 + 6a + 9 = (a + 3)^2$$

$$x^2 - 10x + 25 = (x - 5)^2$$

$$d^2 + 49 - 14d = (d - 7)^2$$

$$9a^2 + 12a + 4 = (3a + 2)^2$$

$$9b^2 - 24bc + 16c^2 = (3b - 4c)^2$$

$$25x^2 + 20xy + 4y^2 = (5x + 2y)^2$$

$$36a^2 + 1 + 12a = (6a + 1)^2$$

$$-6ab + a^2 + 9b^2 = (3b - a)^2$$



## Série B :

~.~.~.~.~.

1) Factorise les expressions suivantes par la mise en évidence des facteurs communs.

a)

$$\begin{aligned}8a^2 - 4a &= 4a \cdot (2a - 1) \\3a^2 - 6a^2b &= 3a^2 \cdot (1 - 2b) \\- 28a - 21a^2 &= -7a \cdot (4 + 3a) \\12a^2b + 27ab^2 &= 3ab \cdot (4a + 9b) \\6a^2x - 18ax^2 &= 6ax \cdot (a - 3x)\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}2x^3 + 3x^5 &= x^3 \cdot (2 + 3x^2) \\8x^4 - 20x^3 &= 4x^3 \cdot (2x - 5) \\- 9x^2 + 18x^4 &= -9x^2 \cdot (1 - 2x^2) \\- 14x^6 - 35x^3 &= -7x^3 \cdot (2x^3 + 5) \\6x^3y^2 - 24x^2y^3 &= 6x^2y^2 \cdot (x - 4y)\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}25a^6 - 10a^5 + 125a^4c &= 5a^4 \cdot (5a^2 - 2a + 25c) \\4a^2 + 16a^4 - 8a &= 4a \cdot (a + 4a^3 - 2) \\- 18a^2b + 3a^4 + 27b^2 &= -3 \cdot (6a^2b - a^4 - 9b^2) \\10a^4x^2 - 30a^2x &= 10a^2x \cdot (a^2x - 3) \\- 121x^3y - 55xy &= -11xy \cdot (11x^2 + 5)\end{aligned}$$

2) Factorise les expressions suivantes en utilisant la mise en évidence puis un produit remarquable.

a)

$$\begin{aligned}3a^2 - 3b^2 &= 3 \cdot (a - b) \cdot (a + b) \\12x^2 + 12x + 3 &= 3 \cdot (2x + 1)^2 \\50a^2 + 40a + 8 &= 2 \cdot (5a + 2)^2 \\12x^2 - 3 &= 3 \cdot (2x + 1) \cdot (2x - 1) \\27x^2 - 72xy + 48y^2 &= 3 \cdot (3x - 4y)^2\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}20a^2 + 45 + 60a &= 5 \cdot (2a + 3)^2 \\18a^2x - 8b^2x &= 2x \cdot (3a + 2b) \cdot (3a - 2b) \\28x^2 - 140xy^2 + 175y^4 &= 7 \cdot (2x - 5y^2)^2 \\25a^3 - 49ab^2 &= a \cdot (5a + 7b) \cdot (5a - 7b) \\4a^2b^2 - 36x^2y^2 &= 4 \cdot (ab + 3xy) \cdot (ab - 3xy)\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}15a^4b^2 - 15a^2b^4 &= 15a^2b^2 \cdot (a + b) \cdot (a - b) \\80 + 120x^2 + 45x^4 &= 5 \cdot (4 + 3x^2)^2 \\42x^5 + 9x^2 + 49x^8 &= x^2 \cdot (3 + 7x^3)^2 \\36a^2b^4 - a^4 &= a^2 \cdot (6b^2 + a) \cdot (6b^2 - a) \\- 48x^2y^2 + 32y^4 + 18x^4 &= 2 \cdot (4y^2 - 3x^2)^2\end{aligned}$$